ВВЕДЕНИЕ. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

Все математические дисциплины можно условно разделить на *дискретные* и *непрерывные*. Дискретная математика – это та часть математики, главной особенностью которой является изучение отдельных объектов, без привлечения понятия непрерывности, т.е. дискретность – это антипод непрерывности. В дискретной математике отсутствует понятие предельного перехода, присущее классической, «непрерывной» математике. Она занимается изучением дискретных структур, которые возникают как внутри математики, так и в ее приложениях. Однако она зародилась в глубокой древности, раньше, чем непрерывная математика, хотя особую значимость приобрела только в последние десятилетия, в связи с повсеместным внедрением в практику информационных технологий.

Таким образом, в широком смысле дискретная математика включает в себя все разделы математики, в которых не используются топологические методы, в частности понятие непрерывности. Это – все разделы алгебры, математическая логика, почти вся теория чисел (в том числе всевозможные компьютерные арифметики), многие разделы экономико-математических методов, комбинаторика и многие другие дисциплины. В более узком смысле дискретная математика – это те разделы математической логики, алгебры, теории чисел и математической кибернетики, которые непосредственно составляют теоретический фундамент информатики. В этом узком смысле дискретная математика включает в себя теорию булевых функций и их минимизацию, теорию графов и многие разделы теоретической кибернетики, теорию автоматов и формальных грамматик, комбинаторику, теорию алгоритмов (в том числе теорию сложности вычислений), криптографию и теорию кодирования.

Некоторые из вышеперечисленных разделов имеют не только многочисленные «внутренние» (с точки зрения специалиста по информационным системам или вычислительной техники) приложения, используемые, к примеру, при построении различных дискретных устройств, в программировании и т.д., но их результаты и методы применяются также при решении многих нужных для практики задач. Например, при рассмотрении транспортных задач, для нахождения оптимальных решений в управлении, для выделения «узких мест» при планировании и разработке проектов, при составлении оптимальных расписаний, а также при моделировании сложных технологий и процессов различной природы.

Целью изучения дисциплины является ознакомление студентов с системой понятий и некоторыми наиболее важными в приложениях методами теории множеств, математической логики, теории булевых функций и теории графов. Знания и навыки, полученные при ее изучении, используются в дисциплинах: «Информатика», «Программирование», «Структуры и алгоритмы обработки данных в ЭВМ», «Базы данных», «Экспертные и интеллектуальные системы» и т.д. Но в особенности знания по дискретной математике пригодятся при изучении дисциплин, связанных с функциональным и логическим программированием, кодированием и защитой информации.

Основная задача состоит в том, чтобы будущие специалисты чётко освоили основные понятия и приёмы работы с булевыми функциями и графами: построение таблиц значений; поиск и исключение фиктивных переменных; приведение булевых функций к стандартной форме (д.н.ф., к.н.ф., многочлен Жегалкина); основные методы минимизации булевых функций; построение диаграммы (рисунка) графа по его матрицам смежности и инцидентности и обратная задача; установление изоморфизма (одинаковости) графов; определение основных характеристик и свойств графов (векторы степеней, планарность, эйлеровость, гамильтоновость и т.п.); изучение важного частного случая графов – деревьев и их свойств.

За недостатком места о приложениях говорится относительно мало. Однако такие примеры содержатся в литературе.

Данное пособие предназначено в основном для изучения основ именно дискретной математики в узком понимании слова, хотя при этом затронуты основополагающие разделы математической логики – исчисление высказываний и исчисление предикатов. Однако математическую логику настоятельно рекомендуется изучать по более фундаментальным источникам, например, [1, 11,15,16,19,23,29]. В то же время, многие разделы дискретной математики в узком смысле слова в данном пособии никак не отражены, в частности, теория кодирования и криптография, теория алгоритмов и теория сложности вычислений. Это связано, в первую очередь, с ограниченностью отводимого времени для изучения дисциплины в учебных планах у студентов, обучающихся информационным технологиям и использованию вычислительной техники. Курс лекций будет также полезен будущим специалистам по прикладной математике, в частности по математическому и компьютерному моделированию.

Пособие – это существенно поработанный и дополненный вариант пособий [20,21].

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Как уже отмечалось выше во «Введении» это пособие не предназначено для глубокого изучения основ математики, в частности математической логики и теории множеств. Тем не менее, изложенного здесь материала по этим разделам математики вполне достаточно для будущих инженеров почти по всем техническим специальностям, в том числе по математическому и компьютерному моделированию.

1 МНОЖЕСТВА. ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ. СВОЙСТВА МНОЖЕСТВ

См. лекцию 1.

2 БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ. ВАЖНЕЙШИЕ ТИПЫ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

2.1 Декартово произведение множеств, бинарные отношения

2.1.1 Последовательность из n элементов множества называется *упорядоченной n-кой* или *кортежем* (из n элементов). В n-ке каждый элемент занимает определенное место, тогда как во множестве порядок расположения элементов роли не играет. Например, при $a \neq b$ упорядоченные двойки (a,b) и (b,a) различны (иногда упорядоченные пары обозначают как $\langle a,b \rangle$), в то же время, $\{a,b\}=\{b,a\}$.

Множество упорядоченных пар (x,y), образованных элементами множеств X и Y, называется *декартовым*, или *прямым*, *произведением* множеств X и Y и обозначается как $\boldsymbol{X \times Y}$, т.е.

$$\boldsymbol{X \times Y = \{ (x,y) \mid x \in X,\ y \in Y \}}.$$

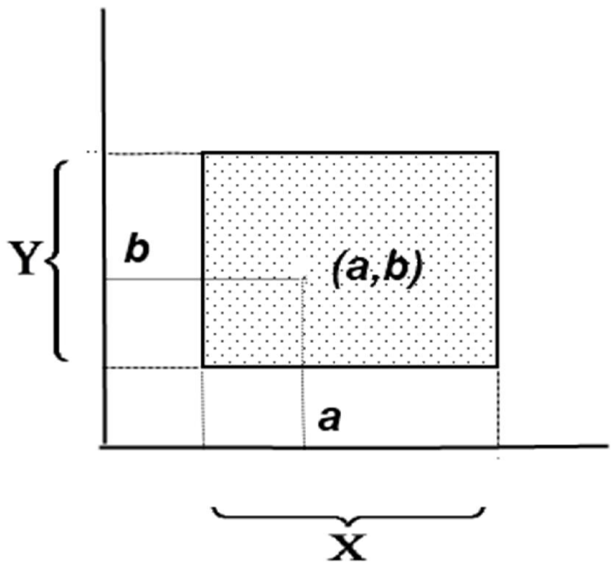

Рисунок 2.1 – Декартово произведение множеств X и Y

Таким образом, элементами декартова произведения являются всевозможные кортежи длины два и вида (x,y).

Геометрической иллюстрацией декартова произведения может служить рисунок 2.1, на котором множества X и Y изображены отрезками вещественной оси, а произведение $X \times Y$ – заштрихованным прямоугольником. Из этого рисунка становится понятым название.

Декартовым произведением множеств $X_1,X_2,\ldots,X_n$ называют множество, состоящее из всех тех и только тех n-ок (кортежей длины n), первая компонента которых принадлежит X_1, вторая – X_2 и т.д. Его обозначают как $\boldsymbol{X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n}$.

Таблица 2.1 – Пример вычисления декартова произведения

Множество X	Множество Y		
	y_1	y_2	y_3
x_1	(x_1,y_1)	(x_1,y_2)	(x_1,y_3)
x_2	(x_2,y_1)	(x_2,y_2)	(x_2,y_3)
x_3	(x_3,y_1)	(x_3,y_2)	(x_3,y_3)
x_4	(x_4,y_1)	(x_4,y_2)	(x_4,y_3)

Пример 2.1 Пусть $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ и $Y=\{y_1,y_2,y_3\}$. Тогда декартово произведение $X \times Y$ можно представить таблицей 2.1; или в виде $X \times Y =$

$\{(x_1,y_1),(x_1,y_2),(x_1,y_3),(x_2,y_1),(x_2,y_2),(x_2,y_3),(x_3,y_1),(x_3,y_2),(x_3,y_3),(x_4,y_1),(x_4,y_2),(x_4,y_3)\}$.

2.1.2 Для приложения теории множеств к решению практических задач часто приходится рассматривать множества, между элементами которых определены те или иные отношения. Так, например, во множестве офицеров данного полка для некоторых пар элементов (a,b) справедливо утверждение «Офицер a служит в одной роте с офицером b», для других пар справедливо утверждение «Офицер a старше по званию офицера b», для третьих – утверждение «Офицер a имеет то же звание, что и офицер b». Каждое из этих утверждений задает некоторое отношение между офицерами a и b (совместной службы, старшинства, равенства званий). Примерами отношений могут служить также теоретико-числовые или теоретико-множественные, или геометрические свойства – *предикаты*: «x меньше, чем y», «x делится на y», «C включено в B», «K конгруэнтно L».

В приведенных примерах речь шла об отношениях между элементами одного и того же множества. Можно говорить и об отношениях (точнее, соответствиях) между элементами различных множеств, например, утверждение «Офицер a служит в роте b» задает соответствие между множеством офицеров и множеством рот.

Для уточнения понятия соответствия используем представление о множестве упорядоченных пар элементов, троек, n-ок, т.е. кортежей.

Бинарным отношением называется всякое подмножество множества $X\times Y$. В этом случае также говорят, что между множествами X и Y установлено бинарное отношение (или *соответствие*). Этот факт символически записывается в виде: $\boldsymbol{(x,y)\in R}$ или другая форма записи – $\boldsymbol{x\,R\,y}$ (например, $x > y$; $a \parallel l$ и т.п.), где $x\in X$, $y\in Y$, R – символ отношения, указывающий конкретное подмножество множества $X\times Y$.

Тернарным отношением (или соответствием) называется подмножество множества упорядоченных троек, являющихся элементами декартова произведения $X\times Y\times Z$.

n-арное отношение (или соответствие) определяется как подмножество множества n-ок, являющихся элементами декартова произведения $X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$.

2.2 Свойства и виды бинарных отношений

Отметим, что часто, например, в теории графов в основном рассматриваются бинарные соответствия, более того, практически всегда можно действия с n-арными отношениями свести к действиям только с бинарными. Поэтому ограничимся рассмотрением соответствий этого типа.

2.2.1 Если множества X и Y в бинарном соответствии совпадают, то говорят об *отношении между элементами множества X* (или об *отношении на множестве X*).

Рассмотрим основные свойства таких отношений.

а) Отношение R на множестве X называется *р е ф л е к с и в н ы м*, если *для любого* элемента $x \in X$ справедливо $\boldsymbol{x\,R\,x}$ (или, иначе, $\boldsymbol{(x,x) \in R}$).

б) Отношение R на множестве X называется *а н т и р е ф л е к с и в - н ы м*, если *для любого* элемента $x \in X$ не верно, что $\boldsymbol{x\,R\,x}$ (или, иначе, $\boldsymbol{(x,x) \notin R}$ при всех $x \in X$).

в) Отношение R между элементами множества X называется *с и м - м е т р и ч н ы м*, если *для любых* элементов $x,y \in X$ справедливо утверждение

$$\boldsymbol{x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x} \text{ (или иначе } \boldsymbol{(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R}).$$

г) Отношение R между элементами множества X называется *а н т и - с и м м е т р и ч н ы м*, если *для любых* элементов $x,y \in X$ справедливо утверждение:

$$\boldsymbol{x\,R\,y \text{ и } y\,R\,x \Rightarrow x = y} \text{ (или иначе } \boldsymbol{(x,y) \in R \text{ и } (y,x) \in R \Rightarrow x = y}).$$

д) Отношение R между элементами множества X называется *т р а н - з и т и в н ы м*, если *для любых* элементов $x,y,z \in X$ справедливо утверждение:

$$\boldsymbol{xRy,\ yRz \Rightarrow xRz} \text{ (или иначе } \boldsymbol{(x,y) \in R \text{ и } (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R}).$$

2.2.2 Для иллюстрации свойств бинарных отношений рассмотрим несколько отношений. 1) На любом множестве можно рассматривать отношения «x равно y» – “=” и «x не равно y» – “$\neq$”; 2) на множестве нормальных людей можно рассматривать отношения: а) «x любит y» – сокращенно *Л*; б) отношение «x враг y» – сокращенно *В*; в) отношение «x родственник y» – *Род*; г) отношение «x одногруппник с y» – *Одн*; 3) на множестве действительных чисел можно рассматривать обычные математические отношения: неравенства (строгие и нестрогие) – “$<$”, “$>$”, “$\geq$”, “$\leq$”; 4) на множестве-степень (см. п. 1.2.7) можно рассматривать отношения быть подмножеством (строгое и нестрогое) – “$\subset$”, “$\subseteq$”; 5) на множестве геометрических фигур в пространстве естественны отношения: а) подобия – “$\backsim$”; б) параллельности – “$\|$”; в) перпендикулярности – “$\perp$”.

П р и м е р ы 2.2 а) Рефлексивными отношениями являются: =, *Л*, *Род*, *Одн*, $\geq$, $\leq$, $\subseteq$, $\backsim$, $\|$. Отношения $\neq$, *В*, $<$, $>$, $\subset$, $\perp$ – не рефлексивные.

б) Антирефлексивными отношениями являются: $\neq$, *В*, $<$, $>$, $\subset$, $\perp$; а отношения: =, *Л*, *Род*, *Одн*, $\geq$, $\leq$, $\subseteq$, $\backsim$, $\|$ – не антирефлексивные.

в) Симметричными отношениями являются: =, $\neq$, *Род*, *В*, *Одн*, $\backsim$, $\|$, $\perp$; отношения *Л*, $\geq$, $\leq$, $<$, $>$, $\subset$, $\subseteq$ – не симметричные.

г) Примерами антисимметричных отношений являются: =, $\geq$, $\leq$, $<$, $>$, $\subset$, $\subseteq$; отношения $\neq$, *Л*, *В*, *Род*, *Одн*, $\backsim$, $\|$, $\perp$ – не антисимметричные.

д) Примерами транзитивных отношений являются: =, $\geq$, $\leq$, $<$, $>$, $\subset$, $\subseteq$, $\backsim$, $\|$, *Одн*; отношения $\neq$, *Л*, *В*, *Род*, $\perp$ – не транзитивные.

У п р а ж н е н и е 2.1 *Обоснуйте эти утверждения.*

2.2.3 Для каждого отношения R можно определить *обратное отношение* – R^{-1}. Краткая запись этого определения выглядит следующим образом:

$$\boldsymbol{R^{-1} = \{ (x,y) \mid y\, R\, x \} = \{ (x,y) \mid (y,x) \in R \}}.$$

Например, для отношения «x является делителем y» обратным является «y кратно x», для отношения «x больше y» обратное – «y меньше x».

Нулевым называется отношение, которое не выполняется ни для одной пары элементов множества. *Универсальным* (или *единичным*) называется отношение, которое выполняется для любой пары элементов множества.

Дополнительным отношением $\overline{R}$ к отношению R называется такое отношение, что $(x_1,x_2) \in \overline{R} \Leftrightarrow (x_1,x_2) \notin R$. Не следует путать дополнительное отношение и обратное, например, для отношения «x больше y» дополнительным является «x меньше или равно y», а обратным – «x меньше y».

2.2.4 Рассмотрим теперь основные виды бинарных отношений.

2.2.4.1 Отношение $R \subset X \times X$ между элементами множества X, которое является рефлексивным, симметричным и транзитивным, называется *отношением эквивалентности* и часто обозначается $x_1 \sim x_2$, или $x_1 \equiv x_2$, или реже $x_1 \approx x_2$, $x_1 \cong x_2$, $x_1 \eqsim x_2$, $x_1 \simeq x_2$ и т.п. Примерами отношения эквивалентности являются равенство (конгруэнтность) векторов в евклидовом пространстве; отношения равенства, конгруэнтности, подобия или параллельности фигур в евклидовой геометрии и многие другие.

Упражнение 2.2 *Какие ещё отношения из примера 2.2 являются отношениями эквивалентности?*

Разбиением множества X называется такое множество его подмножеств (иногда говорят *система его подмножеств* или *классов*) $\{X_1, X_2,...,X_n\}$, которое удовлетворяет следующим условиям:

1) $X_i \neq \varnothing$, $i = 1, \ldots, n$, т.е. все классы – не пустые;

2) $X_i \cap X_j = \varnothing$, *при* $i \neq j$, т.е. классы попарно не пересекаются;

3) $\bigcup_{i=1}^{n} X_i = X$, т.е. классы покрывают всё множество.

Лемма 2.1 (о разбиении на классы эквивалентности). *Любое отношение эквивалентности, заданное на множестве, разбивает это множество на непустые, непересекающиеся подмножества (или классы). Справедливо и обратное утверждение: каждое разбиение множества на непустые, непересекающиеся подмножества определяет некоторое отношение эквивалентности.*

Разбиение, которое задается отношением эквивалентности $\sim$, определяется следующим образом: элементы x и y попадают в одно подмножество разбиения, если они эквивалентны, т.е. $x,y \in X_i \Leftrightarrow x \sim y$. Эти подмножества называются *классами эквивалентности*. Довольно часто систему классов эквивалентности называют *фактор множеством*, определяемым данной эквивалентностью. Например, отношение «проживание в одном городе» на множестве жителей страны разбивает это множество на непересекающиеся подмножества, которые состоят из жителей одного города.

Так, например, курсы данного факультета являются разбиением множества студентов факультета, а группы данного курса – разбиением множества студентов курса.

Упражнение 2.3 *Какими эквивалентностями задаются разбиения множества студентов на курсы и группы?*

2.2.4.2 Отношение называется *частичным порядком*, если оно либо рефлексивно, либо антирефлексивно, и в любом из этих случаев антисимметрично и транзитивно. Если отношение антирефлексивно, то говорят, что порядок *строгий*; когда оно рефлексивно, то – *не строгий* порядок. Например, отношения «$x_1 \geq x_2$» на множестве вещественных чисел и «$X \subseteq Y$» на множестве-степени $P(A)$ являются отношениями не строгого частичного порядка. А отношения «$x_1 > x_2$» и «$X \subset Y$» – строгие частичные порядки. Отношение частичного порядка часто обозначается символами $>, <, \sqsubset, \sqsupset$ для случая строгого порядка, и $\sqsubseteq, \sqsupseteq, \geq, \leq$ когда он – не строгий.

Пусть на множестве A задан частичный порядок $\sqsubseteq$. Элемент a называется *наименьшим* (иногда добавляют «в A относительно данного порядка»), если он *меньше всех других элементов* этого множества. Другими словами: если для всякого $x \in A$ верно, что $a \sqsubseteq x$. Элемент b из A называется *минимальным*, если меньше него в A элементов нет, т.е. для любого $x \in A$ из того, что $x \sqsubseteq b$ следует $x = b$.

Упражнение 2.4 *Докажите: а) всякий наименьший элемент является минимальным; б) наименьший элемент всегда является единственным (если он существует).*

Упражнение* 2.5 *Приведите пример частичного порядка, в котором минимальный элемент не является наименьшим.*

Указание. Сначала придумайте такой частичный порядок, в котором имеется несколько минимальных элементов.

Упражнение 2.6 *Сформулируйте сами двойственные понятия – максимального и наибольшего элементов. Какие у них свойства?*

2.2.4.3 Отношением *линейного порядка* R называется отношение частичного порядка, обладающее дополнительно еще и свойством полноты (тотальности): для любой пары (x,y) элементов из X выполняется одно из трёх соотношений: или xRy, или yRx, или $x = y$.

Упражнение 2.7 *Докажите, что в любом линейном порядке каждый минимальный элемент является наименьшим, а всякий максимальный – наибольшим.*

2.2.5 При работе с бинарными отношениями рекомендуется изображать исследуемое бинарное отношение в виде *ориентированного графа*, точнее в виде его диаграммы (см также подраздел 12.3).

Пример 2.3 Изобразим (рисунок 2.2) отношение $R = \{(a,a),(a,b), (a,1),(b,1),(b,2),(1,1),(1,a),(1,b)(1,2),(2,a)\}$, заданное на множестве $A = \{a,b,c,1,2\}$. Как Вы можете заметить, упорядоченные пары (a,a) и $(1,1)$ изображены в виде *петель*. Остальным парам, например, (a,b), $(b,2)$, $(1,2)$ соответствуют дуги со стрелками.

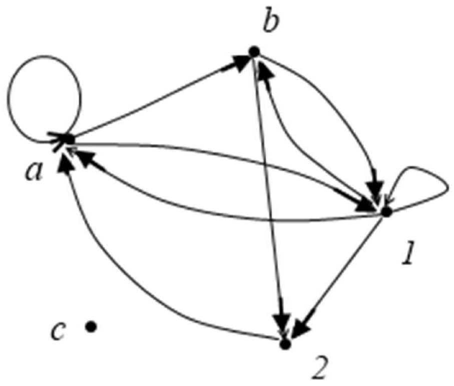

Рисунок 2.2 – Граф бинарного отношения R

Упражнение 2.8. *Какими свойствами должен обладать граф бинарного отношения, если оно: а) рефлексивно; б) антирефлексивно; в) симметрично; г) антисимметрично; д) транзитивно?*

Упражнение 2.9. *Придумайте бинарное отношение S, которое не обладает ни одним из пяти свойств, т.е. оно не рефлексивно, не антирефлексивно, не симметрично, не антисимметрично и не транзитивно.*

2.3 Функции, как особые бинарные отношения

Пусть X и Y – два непустых множества. Закон G, согласно которому любому элементу $x \in X$ ставится в соответствие не более чем один (!) элемент $y \in Y$, называется (*однозначным*) *отображением* множества X в Y или *функцией* из X в Y.

Обратите внимание, что некоторым элементам из X функция может не ставить в соответствие никаких элементов из Y, т.е. функция может быть не всюду определённой, таковы например, знакомые вам со школы тангенс и логарифм. Иногда, чтобы подчеркнуть возможную не определённость функции на всём множестве X, уточняют: «функция, определенная на подмножестве из X». В этом случае в некоторых книгах термин «отображение» не употребляют. Уточним это. Если функция определена для всех элементов множества X, иногда подчёркивают: «функция определенная *на* X, и принимающая значения в Y», и тогда некоторые авторы книг по математике называют такие функции только отображениями, т.е. для них отображение считается всюду определенным законом, а функция – не обязательно. В любом случае G можно рассматривать как частный случай бинарного отношения между множествами

X и Y, т.е. $G \subseteq X \times Y$.

Используются следующие формы записи:

$$\mathbf{G: X \to Y} \text{ или } \mathbf{y = G(x)}, \text{ если } \mathbf{x \in X,\ y \in Y}.$$

В случае однозначного отображения (функции) элемент $y = G(x)$ называется *образом* элемента x.

Случай *многозначного отображения* (или *функции*) формально сводится к однозначному: в этом случае считается, что каждому (или некоторым) $x \in X$ отображение (функция) G ставит в соответствие какое-то подмножество $G(x) \subset Y$, т.е. некоторый элемент множества-степени $P(Y)$. Таким образом, многозначное отображение является обычной функцией, но только между множествами X и $P(Y)$. Тогда образом элемента x будет подмножество $G(x)$.

Интересным является случай, когда множества X и Y совпадают. При этом отображение $G: X \to X$ представляет собой отображение множества X самого в себя и $G \subset X \times X$. Подобные функции часто возникают на практике, например, когда X есть множество действительных чисел.

С функциями, как и с бинарными отношениями вообще, можно делать много различных действий, рассмотрим лишь нескольких операций над ними. Пару из них мы уже определяли в 2.2.3, это – взятие обратного отношения и дополнительного.

Пусть G и H – отображения множества X в Y и Y в Z, соответственно. *Композицией* (или *суперпозицией*) этих отображений назовем отображение $G \circ H$ множества X в Z (варианты обозначения – GH, или $G*H$), которое определяется следующим образом: $(G \circ H)(x) = H(G(x))$.

В частном случае при $H=G$ получим отображения $G^2(x)=G(G(x))$, $G^3(x)= G(G^2(x))$, и для произвольного $S \geq 2$: $G^S(x)=G(G^{S-1}(x))$.

Введем для общности рассуждений соотношение $G^0(x)=x$. Тогда можно записать: $G^0(x)=G(G^{-1}(x)) = G\,G^{-1}(x) = x$ (см. п. 2.2.3).

Предостережения. 1) Это вовсе не означает, что $G^{-1}(x)$ представляет собой обратное отображение (функцию). Почему?

2) В некоторых книгах композиция отображений G и H обозначается как $H \circ G$, тогда, естественно, что $(H \circ G)(x) = H(G(x))$.